ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 00A2C30F99EF9D0306EA3C0F012BEB925E
Владелец: Чанкаев Мурат Хасанович
Действителен: с 02.04.2026 до 26.06.2027

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по УР
М. Х. Чанкаев
«29» апреля 2026 г., протокол № 7

Рабочая программа дисциплины

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(наименование дисциплины (модуля)

Направление подготовки

44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)

(шифр, название направления)

Направленность (профиль) подготовки

Физика; математика

Квалификация выпускника

бакалавр

Форма обучения

Очная

Год начала подготовки - **2023**

Карачаевск, 2026

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Мамчуев А.М.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22.02.2018г. №125, с изменениями и дополнениями от 26.11.2020 г., № 1456, от 8.02.2021 г., №83, на основании учебного плана подготовки бакалавров по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль: «Физика; математика», локальных актов КЧГУ.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры математического анализа на 2026-2027 учебный год, протокол № 8 от 24 апреля 2026г.

Оглавление

1. Наименование дисциплины (модуля) 4

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы 4

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы 4

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся 5

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий 6

5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах) 6

6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы 8

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) 10

7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций 10

7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания 11

7.3. Типовые контрольные вопросы и задания, необходимые для оценивания сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины 11

7.3.1. Перечень вопросов для экзамена 11

7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций 12

7.3.3. Оценочные материалы. Темы к докладам и рефератам. Варианты контрольных работ 12

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля) 15

8.1. Основная литература 15

8.2. Дополнительная литература 15

9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля) 15

9.1. Общесистемные требования 15

9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины 16

9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения 16

9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы 17

10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья 17

11. Лист регистрации изменений 18

1. Наименование дисциплины (модуля):

Теория функций действительного переменного

Целью изучения дисциплины является:

- теоретическое и практическое освоение студентами основных разделов теории функций действительного переменного, необходимых для понимания ее роли в профессиональной деятельности;
- обеспечение качественной подготовки бакалавров на основе применения методов обучения, характерных для теории функций действительного переменного;
- формирования математической культуры мышления, способности к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;
- освоение основных методов теории функций действительного переменного, применяемых в решении профессиональных задач, исследовательской деятельности в области образования.

Для достижения цели ставятся задачи:

- сформировать умения доказывать факты и теоремы теории функций действительного переменного;
- сформировать умения решать типовые задачи основных разделов теории функций действительного переменного;
- знать теорию множеств, строение некоторых видов множеств, элементы теории рядов Фурье и уметь применять для решения различных задач;
- знать теорию меры и интеграла Лебега;
- знать основные структуры анализа; метрические и нормированные пространства;
- знать основы теории линейных операторов и линейных функционалов;
- освоение компетенций в области теории функций действительного переменного.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Б1.О.08.05 «Теория функций действительного переменного» относится к блоку – «Блок 1. Дисциплины (модули)», к обязательной части, предметно-методический модуль II.

Дисциплина (модуль) изучается на 4 курсе в 7 семестре.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПВО	
Индекс	Б1.О.08.05
Требования к предварительной подготовке обучающегося:	
Учебная дисциплина «Теория функций действительного переменного» опирается на входные знания, умения и компетенции, полученные по дисциплинам: «Математический анализ», «Алгебра», «Геометрия», «Дискретная математика» в объёме вузовской программы бакалавриата.	
Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:	
Изучение дисциплины «Теория функций действительного переменного» необходимо для успешного освоения дисциплин формирующих компетенции УК-1, ПК-1, а также для прохождения определенных видов практик.	

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины «Теория функций действительного переменного» направлен на формирование следующих компетенций обучающегося:

Код компе-тенций	Содержание компетенции в соответствии с ФГОС ВО/ОПВО	Индикаторы достижения сформированности компетенций
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности УК-1.3. Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений
ПК-1	Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета) ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО ПК-1.3. Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины (модуля) составляет 3 ЗЕТ, 108 академических часов.

Объём дисциплины	**Всего часов**		
	Очная форма обучения	**Очно-заочная форма обучения**	**Заочная форма обучения**
Общая трудоемкость дисциплины	**108**		
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) (всего)			
Аудиторная работа (всего):	**48**		
в том числе:			
лекции	24		
семинары, практические занятия	24		
практикумы			
лабораторные работы			
Внеаудиторная работа:			
консультация перед экзаменом			

Внеаудиторная работа также включает индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, групповые, индивидуальные консультации и иные виды учебной деятельности, предусматривающие групповую или индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, творческую работу (эссе), рефераты, контрольные работы и др.			
Самостоятельная работа обучающихся (всего)	**60**		
Контроль			
Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет/экзамен)	**Экзамен**		

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)

Очная форма обучения

№ п/п	Курс/семестр	Раздел, тема дисциплины	Общая трудоемкость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)			
			Всего	Аудиторные уч. занятия			Сам. работа
			108	Лек.	Пр.	Лаб.	
	4/7	***Раздел 1. Мощность множества. Строение линейных множеств. Множества в различных пространствах***	**28**	**8**	**8**		**12**
1.		Общая теория множеств. Операции над множествами. Понятие мощности. Эквивалентные множества.		2			
2.		Основные сведения о множествах. Виды отображений.					6
3.		Операции над множествами. Отображения множеств. Взаимно-однозначное соответствие. Примеры.			2		
4.		Счетные множества и их свойства. Несчетные множества. Множества мощности континуума. Сравнение мощностей.		2			
5.		Счетные множества. Несчетные множества. Множества мощности континуума. Примеры.			2		
6.		Точечные множества. Множества пространства R^n. Замкнутые и открытые множества, их свойства.		2			
7.		Точечные множества. Множества на плоскости, в пространстве. Замкнутые и открытые множества. Примеры.			2		
8.		Плотные и нигде не плотные множества. Свойства открытых и замкнутых множеств.					6
9.		Совершенные множества. Канторово совершенное множество.		2			

10.		Замкнутые и открытые множества. Примеры. Совершенные множества. Канторово совершенное множество.			2		
		Раздел 2. Измеримые множества. Мера множества. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега	**26**	**6**	**4**		**16**
11.		Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Мера Лебега для линейных множеств. Множества измеримые по Лебегу.		2			
12.		Измеримость и мера как инварианты движения.					2
13.		Измеримые функции. Последовательности измеримых функций.		2			
14.		Внешняя и внутренняя меры. Меры Жордана и Лебега. Их нахождение, примеры.			2		
		Классы измеримых множеств. Структура измеримых функций.					4
15.		Интеграл Лебега от ограниченной функции. Свойства интеграла Лебега.		2			
16.		Интеграл Римана. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Примеры.			2		
17.		Восстановление первообразной функции.					2
18.		Суммируемые функции. Пространства суммируемых функций.					4
19.		Интеграл Стилтьеса.					4
		Раздел 3. Метрические и нормированные пространства. Линейные операторы и линейные функционалы	**36**	**6**	**8**		**22**
20.		Метрические пространства. Множества точек. Сходимость. Норма. Линейные нормированные пространства.		2			
21.		Метрические пространства. Норма. Аксиомы нормы. Примеры.			2		
22.		Банаховы пространства. Полные метрические пространства. Примеры. Принцип сжимающих отображений.		2			6
23.		Евклидовы пространства. Примеры. Скалярное произведение. Аксиомы. Свойства.					4
24.		Гильбертовы пространства. Ортогональность. Ортонормальность.					6
25.		Скалярное произведение. Гильбертовы пространства. Ортогональность. Ортонормальность. Примеры.			2		
26.		Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Операторы в линейных нормированных пространствах. Линейные функционалы. Линейные функционалы в линейных нормированных и банаховых пространствах.		2			
27.		Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность операторов. Линейные операторы в различных пространствах. Примеры.			2		
28.		Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма функционала. Линейные функционалы в линейных нормированных			2		

		пространствах. Примеры.					
29.		Интегральные и дифференциальные операторы.					6
		Раздел 4. Ряды Фурье. Основные сведения	**18**	**4**	**4**		**10**
30.		Задача разложения в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье.		2			
31.		Сходимость ряда Фурье. Разложение функций в ряд Фурье.			2		
32.		Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортонормальным системам.					4
33.		Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом. Ряд Фурье по произвольной ортогональной системе.		2			
34.		Разложение в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. Вычисление.			2		
35.		Разложение в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. Вычисление.					6
	ИТОГО:		**108**	**24**	**24**		**60**

6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы

Лекционные занятия. Лекция является основной формой учебной работы в вузе, она является наиболее важным средством теоретической подготовки обучающихся. На лекциях рекомендуется деятельность обучающегося в форме активного слушания, т.е. предполагается возможность задавать вопросы на уточнение понимания темы и рекомендуется конспектирование основных положений лекции. Основная дидактическая цель лекции - обеспечение ориентировочной основы для дальнейшего усвоения учебного материала. Лекторами активно используются: лекция-диалог, лекция - визуализация, лекция - презентация. Лекция - беседа, или «диалог с аудиторией», представляет собой непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Ее преимущество состоит в том, что она позволяет привлекать внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории. Участие обучающихся в лекции – беседе обеспечивается вопросами к аудитории, которые могут быть как элементарными, так и проблемными.

Главной задачей каждой лекции является раскрытие сущности темы и анализ ее основных положений. Рекомендуется на первой лекции довести до внимания студентов структуру дисциплины и его разделы, а в дальнейшем указывать начало каждого раздела (модуля), суть и его задачи, а, закончив изложение, подводить итог по этому разделу, чтобы связать его со следующим. Содержание лекций определяется настоящей рабочей программой дисциплины. Для эффективного проведения лекционного занятия рекомендуется соблюдать последовательность ее основных этапов:

1. формулировку темы лекции;
2. указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение;
3. изложение вводной части;
4. изложение основной части лекции;
5. краткие выводы по каждому из вопросов;
6. заключение;
7. рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

Практические занятия. Дисциплины, по которым планируются практические занятия, определяются учебными планами. Практические занятия относятся к основным

видам учебных занятий и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки. Выполнение студентом практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин математического и общего естественно-научного, общепрофессионального и профессионального циклов;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива. Методические рекомендации разработаны с целью единого подхода к организации и проведению практических занятий.

Практическое занятие — это форма организации учебного процесса, направленная на выработку у студентов практических умений для изучения последующих дисциплин (модулей) и для решения профессиональных задач. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях. Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Дидактические цели практических занятий: формирование умений (аналитических, проектировочных, конструктивных), необходимых для изучения последующих дисциплин (модулей) и для будущей профессиональной деятельности.

В процессе подготовки к практическим занятиям, обучающимся необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет обучающимся проявить свою индивидуальность в рамках выступления на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

Образовательные технологии. При проведении учебных занятий по дисциплине используются традиционные и инновационные, в том числе информационные образовательные технологии, включая при необходимости применение активных и интерактивных методов обучения.

Традиционные образовательные технологии реализуются, преимущественно, в процессе лекционных и практических занятий. Инновационные образовательные технологии используются в процессе аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов в виде применения активных и интерактивных методов обучения. Информационные образовательные технологии реализуются в процессе использования электронно-библиотечных систем, электронных образовательных ресурсов и элементов электронного обучения в электронной информационно-образовательной среде для активизации учебного процесса и самостоятельной работы студентов.

Практические занятия могут проводиться в форме групповой дискуссии, «мозговой атаки», разборка кейсов, решения практических задач, публичная презентация проекта и др. Прежде, чем дать группе информацию, важно подготовить участников, активизировать

их ментальные процессы, включить их внимание, развивать кооперацию и сотрудничество при принятии решений.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций

Компетенции	Зачтено			Не зачтено
	Высокий уровень (отлично) (86-100% баллов)	Средний уровень (хорошо) (71-85% баллов)	Низкий уровень (удовлетворительно) (56-70% баллов)	Ниже порогового уровня (неудовлетворительно) (до 55% баллов)
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Демонстрирует полное знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение	УК-1.1. Демонстрирует знание основ особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение	УК-1.1. В целом демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение	УК-1.1. Демонстрирует фрагментарное знание особенностей системного и критического мышления
	УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности	УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности	УК-1.2. В целом умеет применять логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности	УК-1.2. Не умеет применять логические формы и процедуры, не способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
	УК-1.3. Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений	УК-1.3. Анализирует основные источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений	УК-1.3. Анализирует в целом источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений	УК-1.3. Не владеет анализом источников информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений
ПК-1: Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1. Знает полностью структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)	ПК-1.1. Знает основные структуры, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)	ПК-1.1. Знает в целом структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)	ПК-1.1. Не знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)
	ПК-1.2. Полностью умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО	ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО	ПК-1.2. В целом умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО	ПК-1.2. Не умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО
	ПК-1.3. Демонстрирует	ПК-1.3. Демонстрирует	ПК-1.3. В целом демонстрирует	ПК-1.3. Демонстрирует

	умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные	умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные	умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные	фрагментарно умение разрабатывать различные формы учебных занятий

7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания

Порядок функционирования внутренней системы оценки качества подготовки обучающихся и перевод балльно-рейтинговых показателей обучающихся в отметки традиционной системы оценивания проводится в соответствии с положением КЧГУ «Положение о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся», размещенным на сайте Университета по адресу: https://kchgu.ru/inye-lokalnye-akty/

7.3. Типовые контрольные вопросы и задания, необходимые для оценивания сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины

7.3.1. Перечень вопросов для экзамена

1. Основные сведения о множествах. Операции над множествами. Отображения множеств. Виды отображений. Примеры.
2. Понятие эквивалентности множеств. Понятие мощности множеств. Примеры.
3. Счетные множества и их свойства. Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел. Примеры.
4. Несчетность множества действительных чисел.
5. Множества мощности континуума. Примеры.
6. Мощность множества $C_{[a,b]}$.
7. Мощность множества всех вещественных функций.
8. Мощность множества подмножеств. Примеры.
9. Понятие меры множества. Мера открытых множеств. Примеры.
10. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Примеры.
11. Мера замкнутых множеств. Примеры.
12. Замкнутые и открытые множества. Примеры.
13. Структура и строение открытых множеств. Примеры.
14. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Примеры.
15. Структура и строение замкнутых множеств. Примеры.
16. Измеримые функции. Примеры.
17. Эквивалентные функции. Измеримость непрерывной функции. Примеры.
18. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Свойства интеграла Лебега. Примеры.
19. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Примеры.
20. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
21. Метрические пространства. Аксиомы метрики. Примеры.
22. Норма. Линейные нормированные пространства. Аксиомы нормы. Примеры.
23. Эквивалентные нормы в R^n. Примеры.
24. Банаховы пространства. Полные метрические пространства. Примеры.
25. Принцип сжимающих отображений. Примеры.
26. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера. Применения.
27. Скалярное произведение. Аксиомы. Свойства. Примеры.
28. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Операторы в нормированных пространствах. Примеры.

29. Линейные операторы в различных пространствах. Интегральные и дифференциальные операторы. Примеры.
30. Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Примеры.
31. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах. Теорема Хана-Банаха. Примеры.
32. Задача разложения функции в тригонометрический ряд. Примеры.
33. Сходимость ряда Фурье.
34. Формулы Фурье для коэффициентов ряда. Примеры.
35. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Примеры.

7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций

7.3.3. Оценочные материалы. Темы к докладам и рефератам. Варианты контрольных работ.

Раздел 1. Мощность множества. Строение линейных множеств. Множества в различных пространствах.

1. Отображения, их виды.
2. Равномощные множества.
3. Счетные множества. Примеры счетных множеств. Признаки счетности множеств.
4. Мощность континуума? Мощность множества всех числовых последовательностей.
5. Доказать, что множество нечетных натуральных чисел и множество четных натуральных чисел равномощны.
6. Доказать, что множество положительных действительных чисел равномощно множеству отрицательных действительных чисел.
7. Доказать, что множество натуральных чисел равномощно множеству чисел, являющихся точными квадратами.
8. Доказать, что любые два интервала $(a;b)$ и $(c;d)$ равномощны. Доказать, что отрезок $[a;b]$ и интервал $(a;b)$ равномощны.
9. Доказать, что любой круг равномощен любому квадрату.
10. Доказать, что множество иррациональных чисел равномощно множеству действительных чисел.
11. Показать, что множество точек плоскости с рациональными абсциссами имеет мощность континуума.
12. Доказать, что множество всех точек плоскости имеет мощность континуума.
13. Дайте определение внутренней, внешней и граничной точек множества E. Дайте определение границы множества. Приведите примеры внутренних, внешних и граничных точек для различных фигур на плоскости.
14. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Приведите примеры.
15. Пример всюду плотного множества на отрезке $[0;\ 1]$, отличного от этого отрезка.
16. Свойства открытых и замкнутых множеств.
17. Пусть E – множество функций пространства **C**[-1;1] таких, что $f(x) \le 1$ при $x \in [-1;1]$. Показать, что функция $f_0(x) = 2x$ является внешней «точкой» для множества E.

Раздел 2. Измеримые множества. Мера множества. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

1. Дайте определение интеграла Римана. Приведите примеры интегрируемых и неинтегрируемых по Риману функций.
2. Какая функция называется интегрируемой по Лебегу на отрезке? Можно ли указать функцию, интегрируемую на отрезке по Риману, но не интегрируемую по Лебегу?

3. Можно ли указать функцию, интегрируемую на отрезке по Лебегу, но не интегрируемую по Риману?
4. Какое множество называется измеримым по Лебегу? Какое число называется его мерой?
6. Докажите, что любой интервал $(a;b)$ измерим, и найдите его меру.
7. В чем заключается свойство счетной аддитивности меры?
8. Измеримость и мера как инварианты движения.
8. Приведите классы измеримых множеств. Их основные свойства.
9. Охарактеризуйте структуру измеримых функций.
10. Показать, что функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}0; & при\ x\ иррациональном,\\ 1; & при\ x\ рациональном\end{cases}$ не интегрируема по Риману на отрезке $[0;1]$.
11. Показать, что функция $f(x)=\begin{cases}x; & при\ x\in[0;1),\\ 0; & при\ x\notin[0;1)\end{cases}$ интегрируема по Лебегу, и найти ее интеграл.
12. Показать, что функция f такая, что $f(0)=0$ и $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x\neq 0$ интегрируема на отрезке $[-1;8]$, и найти ее интеграл.
13. Показать, что функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ интегрируема на R, и найти ее интеграл.
14. В чем заключается предельный переход под знаком интеграла Лебега?
15. Как восстановить первообразную функции?
16. В чем смысл сходимости по мере и сходимости почти всюду (почти везде)? Их связь.
17. Суммируемые функции. Определение. Примеры.
18. Интеграл от неотрицательной измеримой функции.

Раздел 3. Метрические и нормированные пространства. Линейные операторы и линейные функционалы.

1. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость элементов.
2. Линейные и аффинные многообразия. Примеры. Изоморфизм.
3. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства.
4. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера.
5. Евклидовы пространства. Примеры.
6. Скалярное произведение. Аксиомы. Свойства. Примеры пространств со скалярным произведением.
7. Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность.
8. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.
9. Теорема Хана-Банаха.
10. Непрерывные линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.
11. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.
12. Операторы в нормированных пространствах. Линейные операторы в различных пространствах.
13. Интегральные и дифференциальные операторы.

Раздел 4. Ряды Фурье. Основные сведения.

1. В чем заключена задача разложения в тригонометрический ряд.
2. Коэффициенты ряда Фурье. Формулы.
3. Как проверить ортогональность системы функций.
4. Как выглядит комплексная форма тригонометрического ряда Фурье?
5. Условия сходимости ряда Фурье.

6. Ряды Фурье по ортонормальным системам.
7. Разложение функций в ряд Фурье по четным и нечетным степеням.
8. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, на интервале $(-\pi,\pi)$

11. Почему ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ можно почленно интегрировать в промежутке от $-\pi$ до π .

12. В разложении в ряд Фурье функции $f(x)=\begin{cases}-2; -\pi<x<0\\ 3; 0\le x<\pi\end{cases}$, на интервале $(-\pi,\pi)$ найти коэффициент a_0 .

13. Укажите, при каком значении l система функций $\left\{1,\cos\frac{\pi nx}{l},\sin\frac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке [–2; 2]:

14. Для тригонометрического ряда, составленного для функции $f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots,\quad -\pi\le x\le\pi,$ найдите формулы коэффициентов Фурье (n = 1, 2, 3, …).

15. Для тригонометрического ряда $b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots+b_n\sin nx+\ldots,$ составленного для функции $f(x)$ на отрезке [0; π], найдите формулы коэффициентов Фурье (n = 1, 2, 3, …).

16. Для тригонометрического ряда $a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx+\ldots,$ составленного для функции $f(x)$ на отрезке [0; π], укажите верные формулы коэффициентов Фурье(n = 1, 2, 3, …).

Варианты контрольных работ

Контрольная работа №1
Вариант № 0

1. Постройте биективное отображение множества чисел из интервала (0,1) на множество чисел из интервала (0,a).
2. Установить взаимно-однозначное соответствие между множествами чисел I и R.
3. Определить мощность множества чисел вида $n\sqrt{m}$, (где m, n – натуральные).
4. Доказать, что множество всех непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ имеет мощность гиперконтинуума.

Контрольная работа №2
Вариант № 0

1. Доказать, что производное множество каждого множества замкнуто.

2. Найти $dA, \overline{A}, A\setminus A$, если $A-$ множество точек (x,y), таких, что $-1\le x<1, -1\le y<1$.

3. Доказать, что множество чисел отрезка [0,1] , десятичное разложение которых невозможно без цифры 7, измеримо по Лебегу и найти его меру.

4. Пусть $f_n(x)=\begin{cases}n; 0<x<\frac{1}{n},\\ 0; \frac{1}{n}\le x<1.\end{cases}$ $n=1,2,\ldots.$ $x\in(0,1).$ Найти интеграл: $\int_0^1 f_n(x)dx$

Контрольная работа №3
Вариант № 0

1. Разложить в ряды Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале (0; π), предварительно доопределив ее на интервале (–π; 0) тремя разными способами: 1) положив $f(x)=0$, если $x\in(-\pi;0)$; 2) продолжив таким образом, чтобы вновь полученная функция была четной; 3)

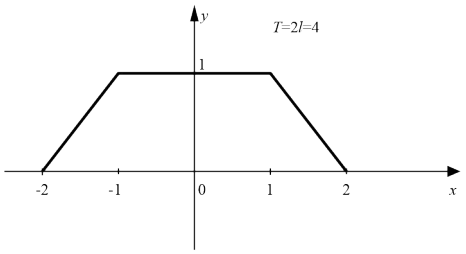
продолжив ее таким образом, чтобы вновь полученная функция была нечетной. Во всех трех случаях построить графики полученной в результате доопределения функции и суммы ее ряда Фурье.

$f(x) = x - 1$.

2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2l$, заданную на указанном интервале длины $2l$.

$f(x) = x,\ 1 < x < 3,\ l = 1$.

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2l$, заданную графически на промежутке длиной $2l$.



8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

8.1. Основная литература

1. Авраменко, В. С. Теория функций действительного переменного : учебное пособие / В. С. Авраменко. — Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011 — Часть 1 — 2011. — 100 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/195999 - Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Авраменко, В. С. Теория функций действительного переменного : учебное пособие / В. С. Авраменко. — Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011 — Часть 2 — 2012. — 112 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/196002 - Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Быкова, О. Н. Теория функций действительного переменного : учебное пособие / О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин, Б. Н. Кукушкин. - Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2019. - 196 с. - ISBN 978-5-905554-21-6. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1027407 - Режим доступа: по подписке.

4. Леонтьева, Т. А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учеб. пособие / Т. А. Леонтьева, А. В. Домрина — М.: ИНФРА-М, 2018. — 164 с. — (Высшее образование: Магистратура). - ISBN 978-5-16-006429-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/917972 - Режим доступа: по подписке.

8.2. Дополнительная литература

1. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу. [Электронный ресурс] : Учебные пособия / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон. дан. — М.: Физматлит, 2005. — 240 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/2342 - Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах [Электронный ресурс] / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/544632 - Режим доступа: по подписке.

9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)

9.1. Общесистемные требования

Электронная информационно-образовательная среда ФГБОУ ВО «КЧГУ»

Каждый обучающийся в течение всего периода обучения обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) Университета из любой точки, в которой имеется доступ к информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», как на территории Университета, так и вне ее.

Функционирование ЭИОС обеспечивается соответствующими средствами информационно-коммуникационных технологий и квалификацией работников, ее использующих и поддерживающих. Функционирование ЭИОС соответствует законодательству Российской Федерации.

Адрес официального сайта университета: http://kchgu.ru.

Адрес размещения ЭИОС ФГБОУ ВО «КЧГУ»: https://do.kchgu.ru.

Электронно-библиотечные системы (электронные библиотеки)

Учебный год	Наименование документа с указанием реквизитов	Срок действия документа
2026-2027 учебный год	Электронно-библиотечная система ООО «Знаниум». Договор № 332 эбс с 02.06.2026г. Электронный адрес: https://znanium.com	С 02.06.2026г. до 01.06.2027г.
2026-2027 учебный год	Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 12 от 26.02.26г. Электронный адрес: https://e.lanbook.com	от 26.02.2026г. до 31.01.2027г.
2026-2027 учебный год	Электронно-библиотечная система КЧГУ. Положение об ЭБ утверждено Ученым советом от 30.09.2015г. Протокол № 1. Электронный адрес: http://lib.kchgu.ru	Бессрочный
2026-2027 учебный год	Национальная электронная библиотека (НЭБ). Договор №101/НЭБ/1391-п от 22. 02. 2023 г. Электронный адрес: http://rusneb.ru	Бессрочный
2026-2027 учебный год	Научная электронная библиотека «ELIBRARY.RU». Лицензионное соглашение №15646 от 21.10.2016 г. Электронный адрес: http://elibrary.ru	Бессрочный
2026-2027 учебный год	Электронный ресурс Polpred.comОбзор СМИ. Соглашение. Бесплатно. Электронный адрес: http://polpred.com	Бессрочный

9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

Занятия проводятся в учебных аудиториях, предназначенных для проведения занятий лекционного и практического типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в соответствии с расписанием занятий по образовательной программе. С описанием оснащенности аудиторий

можно ознакомиться на сайте университета, в разделе материально-технического обеспечения и оснащенности образовательного процесса по адресу: https://kchgu.ru/sveden/objects/

9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения

- MicrosoftWindows (Лицензия № 60290784), бессрочная
- MicrosoftOffice (Лицензия № 60127446), бессрочная
- ABBY FineReader (лицензия № FCRP-1100-1002-3937), бессрочная
- CalculateLinux (внесён в ЕРРП Приказом Минкомсвязи №665 от 30.11.2018-2020), бессрочная
- Google G Suite for Education (IC: 01i1p5u8), бессрочная
- Kaspersky Endpoint Security. Договор №0379400000325000001/1 от 28.02.2025г. Срок действия лицензии с 27.02.2025г. по 07.03.2027г

9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование**»-** https://edu.ru/documents/
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – http://school-collection.edu.ru/
3. Базы данных Scopus издательства Elsevirhttp://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic.
4. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования - http://fgosvo.ru.
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) –http://edu.ru.
6. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – http://school-collection.edu.ru.
7. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (ИС «Единое окно») – http://window/edu.ru.

10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева» созданы условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ).

Специальные условия для получения образования по ОПВО обучающимися с ограниченными возможностями здоровья определены «Положением об обучении лиц с ОВЗ в КЧГУ», размещенным на сайте Университета по адресу: http://kchgu.ru.

11. Лист регистрации изменений

В рабочей программе внесены следующие изменения:

Изменение	Дата и номер протокола ученого совета факультета/ института, на котором были рассмотрены вопросы о необходимости внесения изменений в ОПВО	Дата и номер протокола ученого совета Университета, на котором были утверждены изменения в ОПВО
Переутверждена ОП ВО. Обновлены: учебный план, календарный учебный график, РПД, РПП, программы ГИА, воспитания календарный план воспитательной работы. Обновлены договоры: 1. На антивирус Касперского. (Договор№ 0379400000325000001/1 от 28.02.2025г. Действует по 07.03.2027г. 2. Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 10 от 11.02.2025. 3. Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 12 от 26.02.26г. Действует до 31.01.2027г. 4. Договор № 249-эбс ООО «Знаниум» от 14.05.2025г. Действует до 14.05.2026г.	29.04.2025г., протокол № 8	30.04.2025г., протокол № 8
Переутверждена ОП ВО. Обновлены: учебный план, календарный учебный график, РПД, РПП, программы ГИА, воспитания календарный план воспитательной работы.	27.04.2026г., протокол № 8	29.04.2026г., протокол № 7
Обновлен договор №332 эбс ООО «Знаниум» от 02.06.2026г. Действует с 02.06.2026г. до 01.06.2027г.		03.06.2026г., протокол № 8